ESAME MATEMATICA E STATISTICA 20/06/24

ESERCIZIO 1

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+3x-4}{x+1}\right)$$

a.

- DOMINIO

$$\begin{cases} \frac{x^2+3x-4}{x+1} > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \frac{x^2+3x-4}{x+1} > 0$$

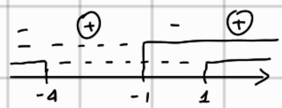
- $x^2+3x-4>0$

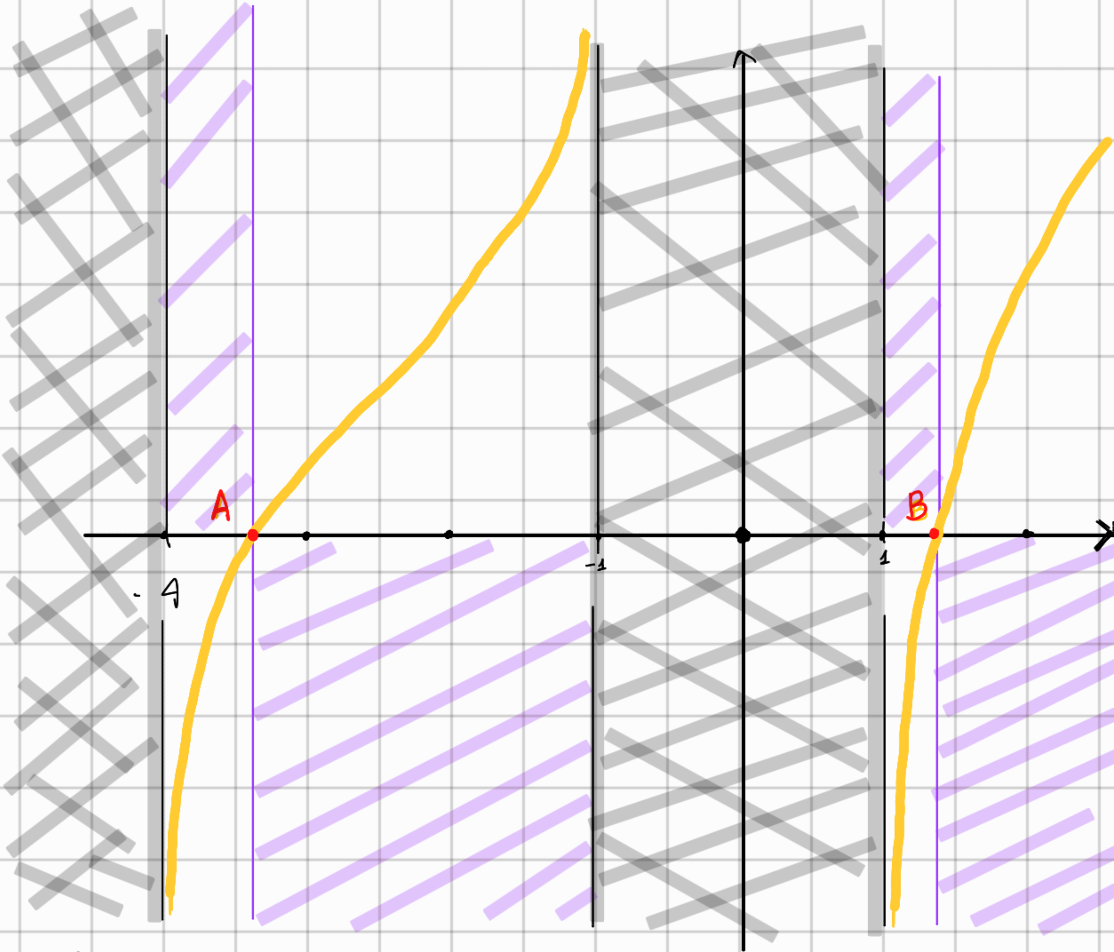
$\Delta = 9+16$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$ → $x_1 = -4$, $x_2 = 1$

- $x+1>0$

$x>-1$





$$D = (-4,-1) \cup (1,+\infty)$$

- NO INTERSEZIONE ASSE y poiché $0 \notin D = (-4,-1) \cup (1,+\infty)$

- STUDIO DEL SEGNO E INTERSEZIONE ASSE x

$$\ln\left(\frac{x^2+3x-4}{x+1}\right) \geq 0 \rightarrow \frac{x^2+3x-4}{x+1} \geq 1$$

$$\frac{x^2+3x-4-x-1}{x+1} \geq 0 \rightarrow \frac{x^2+2x-5}{x+1} \geq 0$$

- $x^2+2x-5 \geq 0$ $\quad \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$

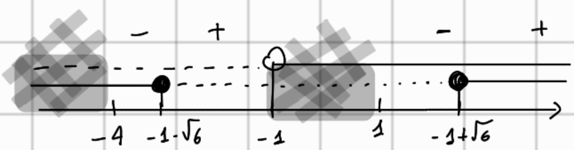
$\Delta = 4+20 = 24$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$ → $x_1 = -1-\sqrt{6} \simeq -3.45$, $x_2 = -1+\sqrt{6} \simeq 1.45$

$x < -1-\sqrt{6} \lor x > -1+\sqrt{6}$

- $x+1>0$

$x>-1$



$f(x) < 0$ per $x \in (-4, -1-\sqrt{6}) \cup (1, -1+\sqrt{6})$

$f(x) > 0$ per $x \in (-1-\sqrt{6}, -1) \cup (-1+\sqrt{6}, +\infty)$

$f(x) = 0$ per $x \in \{-1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}\}$

Sono presenti due intersezioni con l'asse x : $A = (-1-\sqrt{6}, 0)$, $B(-1+\sqrt{6}, 0)$

LIMITI E ASINTOTI

$$\lim_{x \to -4^+} \ln\left(\frac{x^2+3x-4}{x+1}\right) = \lim_{x \to -4^+} \ln\left(\frac{\overset{0^+}{(x+4)}\overset{-5}{(x-1)}}{\underset{-3}{x+1}}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

ASINTOTO VERTICALE DESTRO

$$\lim_{x \to 1^+} \ln\left(\frac{\overset{5}{(x+4)}\overset{0^+}{(x-1)}}{\underset{2}{x+1}}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

ASINTOTO VERTICALE DESTRO

$$\lim_{x \to -1^-} \ln\left(\frac{\overset{3}{(x+4)}\overset{-2}{(x-1)}}{\underset{0^-}{x+1}}\right) = \ln\left(\frac{-6}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

ASINTOTO VERTICALE SINISTRO

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+3x-4}{x+1}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

NO ASINTOTO ORIZZONTALE

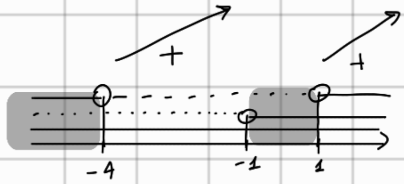
DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = \frac{\cancel{x+1}}{x^2+3x-4} \cdot \frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x-4)}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{2x^2\cancel{+3x}+2x+3-x^2\cancel{-3x}+4}{(x^2+3x-4)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+2x+7}{(x^2+3x-4)(x+1)}$$

$f'(x) \geq 0$

- $x^2+2x+7 \geq 0$ | $x+1>0$ | $x^2+3x-4>0$
  $\Delta = 4-28<0$ | $x>-1$ | $x<-4 \vee x>1$
  $\mathbb{R}$



f è CRESCENTE $\forall x \in D = (-4,-1) \cup (1,+\infty)$

f è DECRESCENTE MAI

NON CI SONO PUNTI STAZIONARI

(b.) $$f'(-1-\sqrt{6}) = \frac{(-1-\sqrt{6})^2+2(-1-\sqrt{6})+7}{\left[(-1-\sqrt{6})^2+3(-1-\sqrt{6})-4\right](-1-\sqrt{6}+1)} = \frac{1+6\cancel{+2\sqrt{6}}-2\cancel{-2\sqrt{6}}+7}{[\underbrace{\cancel{7}+2\sqrt{6}\cancel{-3}-3\sqrt{6}\cancel{-4}}_{=-\sqrt{6}}](-\sqrt{6})} = \frac{12}{6} = 2$$

Visto il valore trovato possiamo dire che la retta tangente in $x_0 = -1-\sqrt{6}$ è parallela a $y=2x$, la funzione è crescente coerentemente col risultato trovato al punto a.

(c.) Data $f: D \to \mathbb{R}$ funzione $x_0 \in D$ si dice punto di flesso se f è CONCAVA a sinistra di x_0 e CONVESSA a destra o viceversa.
La ricerca dei punti di flesso si effettua verificando per quali punti $x \in D$ $f''(x)$ cambia segno.

ESERCIZIO 2

$$\int \frac{4x-1}{x^2+x-2}\,dx$$

$$\Delta = 1+8=9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow x_1=-2 \\ \searrow x_2 = 1 \end{matrix}$$

$$(x+2)(x-1)$$

CERCO DI TRASFORMARE LA MIA FUNZIONE IN UNA DI QUESTA FORMA

$$\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)} =$$

$$= \frac{Ax-A+Bx+2B}{(x+2)(x-1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x+2B-A}{x^2+x-2} = \frac{4x-1}{x^2+x-2}$$

CERCO A e B TALI CHE QUESTO VALGA

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 2B-A=-1 \end{cases} \to \begin{cases} 2B+1+B=4 \\ A=2B+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3B=3 \\ A=2B+1 \end{cases} \to \begin{cases} B=1 \\ A=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-1}\right)dx = 3\int\frac{1}{x+2}dx + \int\frac{1}{x-1}dx =$$

$$= 3\ln|x+2| + \ln|x-1| + c$$

$$\int_{1+e}^{4+e} \frac{4x+1}{(x+2)(x-1)}\,dx = \Big[3\ln|x+2| + \ln|x-1|\Big]_{1+e}^{4+e} = 3\ln|4+e+2| + \ln|4+e-1| - \big[3\ln|1+e+2| + \ln|1+e-1|\big]$$

$|6+e| = 6+e$ perché $6+e > 0$ (IDEM $3+e$)

$$= 3\ln(6+e) + \ln(3+e) - 3\ln(3+e) - \underbrace{\ln(e)}_{1} =$$

$$= 3\ln(6+e) - 2\ln(3+e) - 1 \simeq 2.009$$

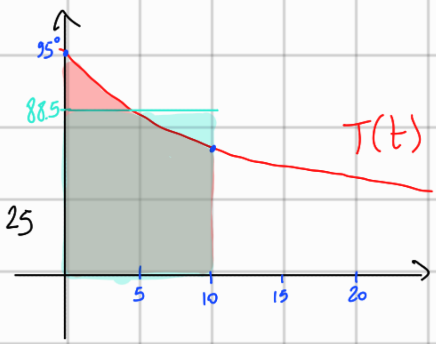
ESERCIZIO 3

$$T(t) = 20 + 75e^{-\frac{t}{50}}$$

$$\frac{1}{10}\int_0^{10} 25+75e^{-\frac{t}{50}}\,dt = \frac{1}{\cancel{10}}\left[\overset{}{\underset{2.5}{\cancel{25}}}t + 75\cdot(-\overset{5}{\cancel{50}})\int_0^{10} -\frac{1}{50}e^{-\frac{t}{50}}\,dt\right] = \left[2.5t - 350e^{-\frac{t}{50}}\right]_0^{10}$$

$$= 25 - 350e^{-\frac{1}{5}} - \left[0-350\right] = 25 + 350\left(1-e^{-\frac{1}{5}}\right) \simeq 25+350(0.18)$$

$$\simeq 25 + 63.5 = 88.5$$



Calcolare la media integrale significa che l'area dell'integrale tra $t_0 = 0$ e $t_1 = 10$ è equivalente a quella del rettangolo con stessa base e altezza 88.5.

ESERCIZIO 4

- $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{4+3.7+4.1+4.1+3.9+3.7+4+4.2+3.8+3.6+4.1+3.6}{12} = \frac{46.8}{12} = 3.9$

POICHÉ LA VARIANZA DELLA POPOLAZIONE È NOTA ESEGUO UN TEST Z con $\begin{cases} \bar{x} = 3.9 \\ \mu = 4 \\ \sigma = 0.22 \\ n = 12 \end{cases}$

$H_0: \mu = 4g$ ← IPOTESI NULLA: la quantità media di composto è corretta, (le osservazioni non si discostano molto dalla media aspettata)

$H_1 = \mu \neq 4g$ ← IPOTESI ALTERNATIVA: la quantità di composto è diversa da 4 g

Posso affermare l'ipotesi alternativa solo se il test supera il livello di significatività minimo di $\alpha = 0.10$

$$Z^* = \frac{|\mu - \bar{x}|}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{|4-3.9|}{0.22}\sqrt{12} \simeq 1.57 < 1.645$$

NON SUPERA NEANCHE IL LIVELLO MINIMO

α	0.10	0.05	0.01	0.001
	1.645	1.960	2.576	3.291

Accetto H_0
⇓
La quantità di composto media è verosimilmente $\mu = 4g$

- La MODA è l'osservazione più frequente: $\boxed{4.1}$ con 3 occorrenze nel campione.

MEDIANA

Scrivo tutte le osservazioni riordinate

3.6	3.6	3.7	3.7	3.8	3.9	4.0	4.0	4.1	4.1	4.1	4.2
$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$	$x^{(6)}$	$x^{(7)}$	$x^{(8)}$	$x^{(9)}$	$x^{(10)}$	$x^{(11)}$	$x^{(12)}$

n è PARI ⇒

$$Me = \frac{x^{(\frac{n}{2})} + x^{(\frac{n}{2}+1)}}{2} = \frac{x^{(6)}+x^{(7)}}{2} = \frac{3.9+4.0}{2} = 3.95$$

VARIANZA CAMPIONARIA

x_i	3.6	3.6	3.7	3.7	3.8	3.9	4.0	4.0	4.1	4.1	4.1	4.2
$(x_i - \bar{x})$	-0.3	-0.3	-0.2	-0.2	-0.1	0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3
$(x_i - \bar{x})^2$	0.09	0.09	0.04	0.04	0.01	0	0.01	0.01	0.04	0.04	0.04	0.09

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{(12-1)}(0.09+0.09+0.04+0.04+0.04+0.01+0+0.0+0.01+0.04+0.04+0.09) = \frac{0.5}{11} \simeq 0.045$$